

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagel
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

46e jaargang
1970/1971
no 6
februari

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Ch. Krijnen - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oestgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 15,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 10,50. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:
Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-29786-30785.

Vrije variabelen en open beweringen

P. G. J. VREDENDUIN
Oosterbeek

Het oplossen van vergelijkingen wordt veelal als volgt ingeleid. We schrijven op

$$x^2+x+1 = 3x+9.$$

Of dit waar is, weten we niet, want we weten niet hoe groot x is. Kiezen we voor x b.v. 3, dan krijgen we

$$3^2+3+1 = 3 \cdot 3+9$$

en dit is niet waar. Kiezen we daarentegen 4, dan krijgen we

$$4^2+4+1 = 3 \cdot 4+9$$

en dit is wel waar.
De grondgedachte van deze redenering is: $x^2+x+1 = 3x+9$ is geen bewering (uitspraak), want er komt een vrije variabele in voor. Voordat ik hier nader op inga, is het misschien nuttig voor een juist begrip zoveel over vrije en gebonden variabelen te vertellen als nodig is om het vervolg te begrijpen.
In

$$x^2+x+1 = 3x+9$$

komt de variabele x vrij voor. Want als we voor x een getal invullen, dan ontstaat er een zinvolle bewering. Daarentegen komt in

$$\forall x\, x^2+x+1 = 3x+9$$

de variabele x niet vrij voor. Probeer maar een getal, b.v. 3, voor x te substitueren. Er komt dan

$$\forall 3\; 3^2+3+1 = 3 \cdot 3+9$$

en wat hier staat, is zinloos. We zeggen, dat de variabele x in $\forall x\, x^2+x+1 = 3x+9$ gebonden voorkomt en dat deze variabele door de kwantor $\forall x$ gebonden wordt. Evenzo is in

$$x^2+3xy = 0$$

zowel x als y een vrije variabele. Maar in

$$\forall x\, \exists y\, x^2+3xy = 0$$

zijn ze beide gebonden, de een door de kwantor $\forall x$ en de ander door de kwantor $\exists y$. In

$$\forall x\, x^2+3xy = 0$$

is x gebonden en y vrij. Voor x kunnen we niet, maar voor y wel een getal invullen, als we ten minste de eis stellen, dat er een zinvolle bewering ontstaat.
Misschien is er nog onzekerheid over de term 'bewering'. Onder een bewering of een uitspraak versta ik, ruw gezegd, iets, waarvan het zin heeft te zeggen of het waar of fout is.
Verder de term 'zinvol'. Niet zinvol is b.v. $\frac{3}{0} = 3$. Immers $\frac{3}{0}$ is niet gedefinieerd en heeft dus geen betekenis. Hoewel het schijnt op het eerste gezicht, dat $\frac{3}{0} = 3$ een bewering is, is dit toch niet zo, omdat hetgeen er staat niet zinvol is. (Natuurlijk is 'zinvolle bewering' een pleonasme, maar dit pleonasme is gebezigd voor de duidelijkheid.)
Is nu

$$x^2+x+1 = 3x+9$$

een bewering? Dat is niet zo, zeggen velen, want we weten niet, of het waar of niet waar is. Wel is een bewering

$$\forall x\, x^2+x+1 = 3x+9.$$

Hiervan kunnen we zeggen of het waar of niet waar is. We kunnen zelfs direct zien, dat het niet waar is.
Dus: zolang niet alle variabelen gebonden zijn, zouden we niet met een bewering te maken hebben. Want we weten dan niet of hetgeen er staat waar of onwaar is. Dat zou afhangen van de waarden, die we aan de vrije variabelen toekennen. Zijn echter alle variabelen gebonden, dan hebben we te maken met een bewering.

Na deze inleiding keren we terug naar onze vergelijking. We stellen als probleem x op te lossen uit

$$x^2+x+1 = 3x+9.$$

Bij het oplossen wordt als regel de volgende procedure gevolgd:

$$x^2+x+1 = 3x+9 \quad (1)$$

$$x^2-2x-8 = 0 \quad (2)$$

$$(x-4)\ (x+2) = 0 \quad (3)$$

$$x = 4 \vee x = -2 \quad (4)$$

De gedachte is duidelijk. Men wil zeggen, dat de vergelijkingen (1), (2), (3), (4) gelijkwaardig zijn en dat hun oplossingsverzameling dus $\{4, -2\}$ is.
Maar wat staat er nu eigenlijk? Er staan onder elkaar vier regels, waarin de variabele x vrij voorkomt. Staan hier nu wel of geen beweringen? En indien hier geen beweringen staan, moeten we dan niet door middel van een alkwantor er beweringen van maken? Of mag het zo ook, zonder dat we de vrije variabele eerst gaan binden? Dit probleem wilde ik trachten nader te analyseren.
Daartoe beperk ik me tot de overgang van (1) naar (2). Bedoeld is, dat uit (1) volgt (2) en omgekeerd. Gemakshalve laat ik de tweede helft buiten beschouwing. Dus: uit (1) zou volgen (2). Wat wil dit zeggen?
Liefst zou ik dit eerst in natuurlijke taal vertalen. Men wil zeggen:

> als x een zodanig getal is, dat $x^2+x+1 = 3x+9$, dan geldt voor dit getal ook $x^2-2x-8 = 0$.

Anders gezegd:

ga uit van de hypothese

> x is een getal, waarvoor geldt $x^2+x+1 = 3x+9$. (5)

Uit deze hypothese kunnen we deduceren

> x is een getal, waarvoor geldt $x^2-2x-8 = 0$. (6)

Nog steeds komt in (5) en in (6) de variabele x vrij voor en nog steeds is het daarom discutabel, of het wel beweringen zijn. En als het geen beweringen zijn, zie ik niet in, hoe men uit de een de ander kan deduceren.
Laten we eens een eenvoudiger voorbeeld nemen. Als 1 maart op een woensdag valt, dan valt 2 maart (van hetzelfde jaar) op een donderdag.
Dus:

ga uit van de hypothese

> 1 maart valt op een woensdag. (7)

Uit deze hypothese kunnen we deduceren

2 maart (van hetzelfde jaar) valt op een donderdag. (8)

Valt 1 maart op een woensdag? Dat weet ik niet. Het hangt natuurlijk van het jaar af. Maar als het waar is, dat 1 maart op een woensdag valt, dan is het ook waar, dat 2 maart op een donderdag valt. Akkoord? Zo ja, dan zal men merken gezegd te hebben: als het waar is, dat 1 maart op een woensdag valt.... Blijkbaar heeft het zin dat te zeggen. Blijkbaar is '1 maart valt op een woensdag' dus wel een bewering (uitspraak). Hoewel niemand kan zeggen, of het waar is of niet, want dat hangt nog van het jaar af. Dat niet-vermelde jaar is nu juist de vrije variabele in de bewering '1 maart valt op een woensdag'. Want eigenlijk staat er: '1 maart van het jaar x valt op een woensdag'. En daaruit is dan geconcludeerd: '2 maart van het jaar x valt op een donderdag'. Zo worden weer toe gebracht te accepteren, dat in uitspraken vrije variabelen mogen voorkomen. In het geval van (5) en (6) is de situatie analoog. Niemand zal er bezwaar tegen hebben als ik zeg: als het waar is, dat x een getal is waarvoor geldt $x^2+x+1 = 3x+9$, dan is het ook waar, dat voor het getal x geldt $x^2-2x-8 = 0$.
Ik heb getracht acceptabel te maken, dat uitspraken ook vrije variabelen kunnen bevatten. Ik geef toe, dat de kwestie eigenlijk wel wat dieper ligt. Als men logica bedrijft, zal men eerst moeten vaststellen, wat men uitspraken noemt. En nu gebruik ik liever de term 'uitspraak', omdat 'bewering' wat meer emotioneel geladen is en men bij 'bewering' denkt aan een subject, dat 'iets beweert' en daarmee voor de waarheid van het beweerde wil instaan. De term 'uitspraak' is neutraler en leidt daarom minder makkelijk tot misverstand. Welnu, een logicus zal beginnen met vast te stellen, hoe in zijn systeem uitspraken zijn samengesteld. En het is dus wel de moeite waard logici te raadplegen en te zien, of zij in hun systeem uitspraken met vrije variabelen toelaten. Dat is uiteraard een kwestie van vrije keus en niet allen kiezen hetzelfde. Maar de vrije variabelen in uitspraken komt men bij velen tegen, onder meer bij: Hilbert-Ackermann (Grundzüge der theoretischen Logik), Beth (Les fondements logiques de la mathématique), Kleene (Mathematical Logic), Tarski (Introduction à la logique). Ik hoop, dat deze serie beroemde logici u voldoende vertrouwen inboezemt om ook het toelaten van uitspraken met vrije variabelen acceptabel te gaan achten.
Volledigheidshalve wil ik ook het standpunt doortrekken van degenen, die uitspraken met vrije variabelen verwerpen. Zij zullen dus niet toelaten dat uit

$$x^2+x+1 = 3x+9 \qquad (5)$$

gededuceerd wordt

$$x^2-2x-8 = 0. \qquad (6)$$

Zij vinden alleen maar toelaatbaar de bewering

$$\forall x\,(x^2+x+1 = 3x+9 \Rightarrow x^2-2x-8 = 0). \qquad (9)$$

Ongetwijfeld is deze bewering juist. Maar waar zullen we de voorkeur aan geven? Mij dunkt aan datgene, wat het best aansluit bij ons natuurlijke denken. En hoe denken we? Zeggen we (in gedachten) 'het interesseert me niet wat x is, maar als voor x geldt $x^2+x+1 = 3x+9$, dan geldt ook $x^2-2x-8 = 0$' of zeggen we (in gedachten) 'voor elke x geldt: uit $x^2+x+1 = 3x+9$ volgt $x^2-2x-8 = 0$'? Ik weet zeker, dat zowel wij als onze leerlingen de eerste gedachtengang volgen. En als nu de officiële wetenschap zich niet verzet tegen deze gedachtengang, waarom zouden we dan nog eigenwijs blijven en ons in het keurslijf van de tweede dwingen?
Ik geloof trouwens, dat de meest verstokte tegenstander van de uitspraken met vrije variabelen ze geregeld in zijn onderwijs gebruikt. In de brugklas gebruiken we ze altijd. We schrijven b.v.

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

en we leiden de juistheid van deze formule af zonder dat ooit ergens een gebonden variabele optreedt. Jawel, zeggen de tegenstanders van de vrije variabelen, de alkwantoren zie je niet, maar ze moeten eigenlijk voor elke formule gezet worden.
En in de meetkunde zegt men:

als driehoek ABC rechthoekig is in C, dan geldt $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$.

Hierin zijn A, B en C vrije variabelen en niemand heeft er nog ooit aan gedacht ze te willen binden.
Functiesymbolen worden in de algebra nimmer gebonden. Men zegt b.v., dat

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

en zet hier geen kwantoren voor.
En men zegt, dat het vormen van de doorsnede van twee verzamelingen de commutatieve eigenschap heeft, dus dat

$$V \cap W = W \cap V.$$

Hier zou het al erg naar zijn, als we een alkwantor gingen toevoegen. Want bij elke alkwantor moeten we opgeven op welke verzameling hij betrokken is. Hier zou de alkwantor betrokken zijn op de verzameling van alle verzamelingen. En deze bestaat nu juist niet, gezien de nare paradoxen die het gevolg zijn van het postuleren van het bestaan van deze verzameling.
Ik hoop, dat het betoog nu overtuigend genoeg is. Men kan gerust werken met uitspraken met vrije variabelen; het is niet principieel nodig deze door een alkwantor te binden.

Tot slot wil ik nog terugkeren naar het begin van dit artikel. Daar is vermeld,

dat velen

$$x^2+x+1 = 3x+9 \tag{10}$$

geen bewering achten, omdat het van x afhangt of (10) waar is of niet. Men noemt (10) dan een open bewering. Wat bedoelt men hiermee?
Degenen, die deze redenering volgen, zeggen: of (10) waar of niet waar is, hangt van de keuze van x af. Kies b.v. voor x het getal 3, dan is (10) niet waar. Kies voor x het getal 4, dan is (10) waar. Enz. Zo kunnen we een tabel maken:

waarde toegekend aan x	(10) is waar of niet waar
3	niet waar
4	waar
0	niet waar
$\frac{1}{2}$	niet waar
$-\frac{3}{4}$	niet waar
-2	waar
	enz.

Deze tabel is in wezen een toevoeging. Aan elk getal wordt 'waar' of 'niet waar' toegevoegd. We hebben hier dus te maken met een functie, die een verzameling getallen afbeeldt naar de verzameling {waar, niet waar}. Daarmee is gebleken, wat degenen, die het over een open bewering hebben, met deze term eigenlijk bedoelen. Ze gebruiken de term 'bewering', maar ze bedoelen met 'open bewering' niet een speciaal soort bewering, maar een afbeelding van een getalverzameling naar de verzameling {waar, niet waar}. En, om nu de terminologie consequent door te trekken, het oplossen van een vergelijking zou dan betekenen het zoeken van het volledig origineel van 'waar'.
Dit alles is onmiskenbaar juist. Nu we echter gezien hebben, dat we het rustig kunnen hebben over uitspraken met vrije variabelen, hoeven we onze toevlucht bij de explicatie van de betekenis van een vergelijking niet meer te nemen tot open beweringen. En het maakt de beschouwingen eenvoudiger, als we dit dan ook niet doen. We behoeven niet te vermelden, dat (10) een open bewering is maar kunnen volstaan met te zeggen, dat we de elementen wensen te vinden van de verzameling

$$\{x|x^2+x+1 = 3x+9\}.$$

Bij het zoeken van deze elementen kunnen we dan de normale procedure volgen.

Meetkunde en vectorruimte*

L. R. J. WESTERMANN
Breda

A Het begrip meetkunde met vectoren

Aanduidingen van een stuk leerstof als 'vectormeetkunde', 'meetkunde met vectoren', 'meetkunde op basis van lineaire algebra', e.d. suggereren dat het om een samensmelting van twee theorieën gaat, nl. *meetkunde* en *lineaire vectorruimten.* In feite is dezelfde samengestelde structuur ook al aanwezig in traditionele vakken als planimetrie, stereometrie en analytische meetkunde.
In alle gevallen is n.l. van belang onze kennis van meetkundige figuur en van het getallen-systeem via combinatie te verdiepen en aldus een machtiger apparaat te verkrijgen.
Wij willen enige toelichting op de vectorbenadering van de meetkunde geven en daarbij zullen wij het onderscheid tussen de meetkundige figuur en zijn algebraïsch analogon nogal benadrukken. En vanuit dat gezichtspunt maken wij enkele opmerkingen over begrippen als 'plaatsvector (t.o.v. een vaste oorsprong)', 'parametervoorstellingen', 'coördinaten en coördinatentransformaties' en 'metriek en inprodukt'.

Wij onderscheiden

1 *een verzameling M,* waarvan wij de elementen punten noemen en aanduiden met A, B, C, ...

2 *een lineaire vectorruimte V* over een lichaam L (zie het aanhangsel).

Ten einde effectief meetkundige figuren te kunnen beschrijven gaan wij de structuur der vectorruimte V via *een afbeelding* ϕ in zekere zin aan M opdringen. Onder het cartesisch produkt $M \times M$ van M wordt verstaan de verzameling van alle geordende paren (A, B) van punten A en B van M.

Definitie. Onder *een meetkunde met vectoren* verstaan wij *een* zodanig *drietal* $\{M, V, \phi\}$ van een *verzameling* M, een *vectorruimte* V en een *afbeelding*

* Voordracht gehouden op 4 september 1970 tijdens de cursus vectormeetkunde vanwege de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde te Groningen.

$$\phi: M \times M \to V,$$

dat

α) bij iedere $A \in M$ en iedere $\bar{v} \in V$ is er een $B \in M$ zodat $\phi(A, B) = \bar{v}$;

β) $\phi(A, B) = \bar{o} \Leftrightarrow A = B$;

γ) voor alle A, B en $C \in M$ is $\phi(A, B) + \phi(B, C) = \phi(A, C)$.

Hoewel wij kunnen spreken van een (affiene) meetkunde met vectoren ontbreekt nog heel wat specialisatie om het vertrouwde beeld te krijgen.

Opmerking. Als volgt verkrijgen wij een voorbeeld van een meetkunde met vectoren. Neem voor V de bekende 2-dimensionale reële kolommetjes-ruimte met vectoren van de gedaante $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Voor de punten van M nemen wij eveneens $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, . . . en wij definiëren ϕ door $\phi(A, B) = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$.

Wij zullen nogal eens gebruik kunnen maken van het feit dat

$$\phi(A, B) = -\phi(B, A);$$

dit volgt onmiddellijk uit β) en γ).

B Oorsprong en plaatsvectoren.

De afbeelding ψ_A: $M \to V$, gedefiniëerd door

$$\psi_A(B) = \phi(A, B)$$

is *bijectief* (is een (1, 1)-afbeelding op).
In α) onder A staat te lezen dat ψ_A een afbeelding op (een surjectie) is. ψ_A is ook (1, 1) (een injectie), want uit

$$\psi_A(X) = \psi_A(Y) \text{ of } \phi(A, X) = \phi(A, Y)$$

volgt

$$\phi(A, X) + \phi(X, Y) = \phi(A, Y) + \phi(X, Y),$$
$$\phi(A, Y) = \phi(A, Y) + \phi(X, Y),$$
$$\bar{o} = \phi(X, Y),$$
$$X = Y.$$

Het is duidelijk dat wij $\psi_O(X)$ *de plaatsvector van X t.o.v. O* kunnen noemen. Men zou (een beetje hoogdravend) *de afbeelding* ψ_O *de plaatsvector t.o.v. O* kunnen noemen.
*De overgang van een oorsprong O naar een oorsprong O** gaat volgens

$$\begin{aligned}\psi_{O^*}(X) &= \phi(O^*, X) = \phi(O^*, O) + \phi(O, X) = \\ &= \phi(O, X) + \phi(O^*, O) = \\ &= \psi_O(X) + \phi(O^*, O) = \psi_O(X) - \psi_O(O^*).\end{aligned}$$

C Lineaire variëteiten en parametervoorstellingen

De definitie van lijn in onze meetkunde ligt voor de hand.

Definitie. Onder *een lijn* l verstaan wij een verzameling *van tenminste twee punten*, zodanig dat als $A, B \in l$, $A \neq B$, geldt

$$X \in l \Leftrightarrow \text{er is een getal } \lambda \text{ zodat } \phi(A, X) = \lambda\phi(A, B).$$

Het is gemakkelijk na te gaan dat l niet afhangt van de speciale keuze van de punten A en B; dit beduidt tevens dat er door twee verschillende punten precies één lijn gaat.
In de definitie is in feite sprake van een bijectie π tussen l en L, welke zo zou zijn te definiëren:

$$\pi(X) = \lambda \Leftrightarrow \phi(A, X) = \lambda\phi(A, B).$$

De meetkundige lijn wordt gedefiniëerd als een copie van L, zoals dat in de traditionele planimetrie via de meetkundige vermenigvuldiging min of meer heimelijk wordt gedaan (met het reële getallenlichaam R i.p.v. L).
Laat nu l een lijn zijn en $A, B \in l$, $A \neq B$. Zij verder O een of ander punt. Bij $X \in l$ is er een λ (en omgekeerd) zodat

$$\begin{aligned}
&\phi(A, X) = \lambda\phi(A, B),\\
&\phi(O, X) - \phi(O, A) = \lambda\phi(A, B),\\
&\phi(O, X) = \phi(O, A) + \lambda\phi(A, B),\\
&\psi_O(X) = \psi_O(A) + \lambda\phi(A, B),\\
&\bar{x} = \bar{a} + \lambda\bar{r}.
\end{aligned}$$

Wij hebben een *parametervoorstelling* (voor de plaatsvectoren $\bar{x}$ t.o.v. O van de punten X) *van* l. In dit verband is heel duidelijk dat de *richtingsvector* geen plaatsvector (maar een vrije vector) is. Een parametervoorstelling van l is in feite niets anders dan een bijectie van L op l (vergelijk de eerder genoemde π). Deze bijectie is niet ondubbelzinnig bepaald, maar hangt af van O, A en B. Zo is een parametervoorstelling

$$\bar{x} = \bar{a} + \lambda\bar{r} + \mu\bar{s}$$

van een vlak W een bijectie van $L \times L$ op W.

Definitie. Onder *een lineaire variëteit* W verstaan wij een niet-lege deelverzameling van punten van M zodanig dat er een lineaire deelruimte D van V is met de eigenschap dat als $P \in W$ geldt

$$X \in W \Leftrightarrow \phi(P, X) \in D.$$

D heet de richtruimte van W.
Niet moeilijk is na te gaan dat W niet afhangt van de speciale keuze van P. De eerder gegeven definitie van lijn is een speciaal geval van de laatste met voor D de deelruimte gevormd door vectoren van de gedaante $\lambda\phi(A, B)$, $\lambda \in L$.

Eigenschap. De *doorsnede van twee lineaire variëteiten* W_1 en W_2 is leeg of een lineaire variëteit met als richtruimte de doorsnede $D_1 \cap D_2$ van de richtruimten D_1 en D_2 van W_1 en W_2. (Het bewijs is eenvoudig).
Bekende feiten uit planimetrie resp. stereometrie, zoals twee lijnen hebben een punt gemeen of zijn parallel resp. twee vlakken die een punt gemeen hebben, hebben ook een lijn gemeen, berusten nu op de in het aanhangsel genoemde dimensie-stelling.
Voor de planimetrie nemen wij V 2-dimensionaal zodat dim $(D_1 \oplus D_2) \leqq 2$. Voor de bij de lijnen l_1 en l_2 behorende D_1 en D_2 geldt dim D_1 = dim $D_2 = 1$ zodat

$$\dim(D_1 \cap D_2) = \begin{cases} 0 \text{ (punt gemeen)} \\ 1 \text{ (parallel).} \end{cases}$$

Voor de stereometrie is dim $V = 3$ en dus $\dim(D_1 \oplus D_2) \leqq 3$. Zijn W_1 en W_2 vlakken dan is dim D_1 = dim $D_2 = 2$ en $\dim(D_1 \oplus D_2) \geqq 2$, zodat

$$\dim(D_1 \cap D_2) = \begin{cases} 1 \text{ (een lijn gemeen)} \\ 2 \text{ (parallel).} \end{cases}$$

D Coördinaten

Om in de meetkunde *coördinaten* te kunnen introduceren, veronderstellen wij dat dim $V = n$ en dat $\bar{\bar{v}} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ een basis van V is. Kiezen wij een oorsprong $O \in M$ dan is de ondubbelzinnig bij $X \in M$ horende vector $\phi(O, X) = \psi_O(X)$ te schrijven als

$$\phi(O, X) = \psi_O(X) = x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + \ldots + x_n\bar{v}_n.$$

Het n-tal $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ noemen wij *de coördinaten van X t.o.v. het coördinatenstelsel* $\{O; \bar{\bar{v}}\}$. Dit is te noteren als

$$\Gamma(X) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)';$$

De van $\{O; \bar{\bar{v}}\}$ afhangende functie Γ zouden wij ook het coördinatenstelsel kunnen noemen.
Is $\{O^*; \bar{\bar{v}}^*\}$ met bijhorende Γ^* een ander coördinatiestelsel, dan is

$$\begin{aligned} \psi_O(X) &= \phi(O, X) = \phi(O, O^*) + \phi(O,^*, X) = \\ &= \psi_{O^*}(X) + \psi_O(O^*). \end{aligned}$$

Zijn de coördinaten van de 'nieuwe oorsprong' O^* t.o.v. het 'oude' stelsel $t_1, t_2, \ldots, t_n$, dus

$$\Gamma(O^*) = (t_1, t_2, \ldots, t_n)',$$

dan volgt uit $\psi_O(X) = \psi_{O^*}(X) + \psi_O(O^*)$

$$\begin{aligned}\psi_O(X) &= x_1^*\bar{v}_1^* + \ldots + x_n^*\bar{v}_n^* + (t_1\bar{v}_1 + \ldots + t_n\bar{v}_n) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j^*\bar{v}_j^* + \sum_{i=1}^{n} t_i\bar{v}_i = \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j^*\left(\sum_{i=1}^{n} s_{ij}\bar{v}_i\right) + \sum_{i=1}^{n} t_i\bar{v}_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} s_{ij}x_j^* + t_i\right)\bar{v}_i.\end{aligned}$$

Dus

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}x_j^* + t_i,\ i = 1, 2, \ldots, n;$$

hetgeen de bekende *formules voor de coördinatentransformatie* zijn. Deze laten zich in *matrix-vorm* met de transformatie-matrix $S = (s_{ij})$ als volgt schrijven

$$\Gamma(X) = S\Gamma^*(X) + \Gamma(O^*).$$

E Metriek en inprodukt

Tot zover hebben wij het getallen-lichaam L in het midden gelaten en daarmee het misschien lastigste probleem bij de opzet van de meetkunde omzeild. Een (axiomatische) opbouw der meetkunde, zowel bij Euclides als bij Hilbert is voor een belangrijk deel een axiomatisering van het reële getal (axioma's van ordening, continuïteit en volledigheid). Wij zullen *van nu af als lichaam L het lichaam R der reële getallen nemen.* Axiomatisering van de schoolmeetkunde, waarbij R zonder axiomatisering wordt geïntroduceerd is van betrekkeijke waarde. Er zijn wellicht didaktische redenen aan te voeren voor een dergelijke (onvolledige) axiomatische inleiding.

In een 1-dimensionale meetkunde vormen het lengte- en het afstandsbegrip nu geen probleem meer. Wij nemen een lijnstuk AB, $A \neq B$, als eenheid van maat, dus

$$\overline{AB} = 1.$$

Voor een willekeurig lijnstuk CD is er nu een (ondubbelzinnig bepaald) getal λ zodat

$$\phi(C, D) = \lambda\phi(A, B).$$

Wij definiëren dan

$$\overline{CD} = |\lambda|.$$

Is de meetkunde meer-dan-1-dimensionaal, dan kunnen wij op elke lijn afzonderlijk lengte-verhoudingen bepalen, maar zonder verdere toevoegingen zijn de afstanden op verschillende lijnen niet gekoppeld.

Wij nemen nu aan dat de vectorruimte V een zogenaamde *inprodukt-ruimte* is, dat wil zeggen dat aan ieder paar $\bar{a}, \bar{b} \in V$ een reëel getal, het *inprodukt*

$$(\bar{a}, \bar{b})$$

van $\bar{a}$ *en* $\bar{b}$ wordt toegevoegd, en wel zodanig dat

$I1$. $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$ voor alle $\bar{a}, \bar{b}$;

$I2$. $(\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}, \bar{c}) = \lambda(\bar{a}, \bar{c})+\mu(\bar{b}, \bar{c})$, voor alle $\lambda, \mu \in R$ en alle $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$;

$I3$. $(\bar{a}, \bar{a}) > 0 \Leftrightarrow \bar{a} \neq \bar{o}$.

Uit $I2$ volgt gemakkelijk dat $(\bar{o}, \bar{o}) = 0$.
Het *afstandsbegrip in de meetkunde* kan nu als volgt worden gedefiniëerd

$$\overline{XY} = \sqrt{(\phi(X, Y), \phi(X, Y))}.$$

Een eigenschap als

$$\overline{XY} \leqq \overline{XZ}+\overline{ZY}$$

is nu aldus aan te tonen. Zij $\overline{XZ} = \sigma$, $\overline{ZY} = \tau$, dan is

$$\begin{aligned}\overline{XY} &= \{(\phi(X, Y), \phi(X, Y))\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \{(\phi(X, Z)+\phi(Z, Y), \phi(X, Z)+\phi(Z, Y))\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \{(\phi(X, Z), \phi(X, Z))+2(\phi(X, Z), \phi(Z, Y))+(\phi(Z, Y), \phi(Z, Y))\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leqq \{\sigma^2+2\sigma\tau+\tau^2\}^{\frac{1}{2}} = \sigma+\tau = \\ &= \overline{XZ}+\overline{ZY};\end{aligned}$$

daarbij is gebruikt dat $|(\bar{a}, \bar{b})| \leqq \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})\cdot(\bar{b}, \bar{b})}$, de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz.

F Afbeeldingen

Wij zullen hier slechts een enkel punt even aanstippen.

Definitie. De afbeelding $\tau : M \rightarrow M$ heet een *translatie* als

$$\phi(\tau A, \tau B) = \phi(A, B) \text{ voor alle } A, B \in M.$$

Gemakkelijk blijkt dat translaties bijectief zijn.
Zijn X en Y twee punten dan is er een translatie τ zodat

$$Y = \tau X.$$

We kiezen als beeldpunt van het punt W nl. dat punt $Z = \tau W$, waarvoor

$$\phi(Y, \tau W) = \phi(Y, Z) = \phi(X, W);$$

nu is

$$\begin{aligned}\phi(\tau A, \tau B) &= \phi(\tau A, Y)+\phi(Y, \tau B) = \\ &= -\phi(Y, \tau A)+\phi(Y, \tau B) = \\ &= -\phi(X, A)+\phi(X, B) = \\ &= \phi(A, X)+\phi(X, B) = \\ &= \phi(A, B).\end{aligned}$$

Definitie. *De afbeelding* $\alpha : M \rightarrow M$ *heet affien* als

1e $\phi(X_1, X_2) = \phi(U_1, U_2) \Rightarrow \phi(\alpha X_1, \alpha X_2) = \phi(\alpha U_1, \alpha U_2)$;

2e *de afbeelding* $A : V \rightarrow V$, gedefinieerd door

$A\phi(X_1, X_2) = \phi(\alpha X_1, \alpha X_2)$ *lineair* is.

De eerder gedefiniëerde translatie is blijkbaar affien.
Als toelichting tonen wij aan dat eén affiene afbeelding $\alpha : M \rightarrow M$ te ontbinden is in een produkt

$$\tau \beta$$

van een translatie τ en een affiene afbeelding β met dekpunt een willekeurig punt O.
Wij kiezen voor τ de translatie met de eigenschap

$$\tau O = \alpha O.$$

Voor β nemen wij dan $\tau^{-1}\alpha$.
β is een affiniteit want daar τ^{-1} een translatie en α een affiene afbeelding is, geldt

$$\phi(X_1, X_2) = \phi(U_1, U_2) \Rightarrow \phi(\alpha X_1, \alpha X_2) = \phi(\alpha U_1, \alpha U_2) \Rightarrow$$
$$\phi(\tau^{-1}\alpha X_1, \tau^{-1}\alpha X_2) = \phi(\tau^{-1}\alpha U_1, \tau^{-1}\alpha U_2).$$

Verder is $B : V \rightarrow V$ gedefiniëerd door

$$B\phi(X_1, X_2) = \phi(\beta X_1, \beta X_2)$$

lineair daar $\phi(\beta X_1, \beta X_2) = \phi(\tau^{-1}\alpha X_1, \tau^{-1}\alpha X_2) = \phi(\alpha X_1, \alpha X_2)$ en α affien is.
Tenslotte is

$$\beta O = \tau^{-1}\alpha O = \tau^{-1}\tau O = O.$$

Er valt in dit verband natuurlijk nog heel wat te zeggen, b.v. over groepen van afbeeldingen, zoals translaties, gelijkvormigheidstransformaties en isometrieën. Het ging er hier echter om het principe van de beschrijving van meetkundige afbeeldingen in het ontwikkelde systeem aan te geven.

Aanhangsel

Enige feiten over vectorruimten, die in het voorgaande van belang zijn, worden hier nog kort aangeduid.

1 Een vectorruimte V over het lichaam L, waarvan de elementen α, β, γ, ... getallen of scalairen genoemd worden, bestaat uit een verzameling vectoren $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, ... en twee bewerkingen, de optelling en de vermenigvuldiging van een vector met een scalar; en wel zodanig dat

$$\bar{a}+\bar{b} \in V, \qquad \lambda\bar{a} \in V;$$
$$(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c} = \bar{a}+(\bar{b}+\bar{c}), \qquad \bar{a}+\bar{b} = \bar{b}+\bar{a};$$
$$\bar{a}+\bar{o} = \bar{a}, \qquad 1\bar{a} = \bar{a};$$
$$\bar{a}+(-\bar{a}) = \bar{o};$$
$$(\lambda+\mu)\bar{a} = \lambda\bar{a}+\mu\bar{a}, \quad \lambda(\bar{a}+\bar{b}) = \lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}, \quad \lambda(\mu\bar{a}) = (\lambda\mu)\bar{a}.$$

2 $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$ heet *onafhankelijk* als

$$\lambda_1\bar{v}_1+\lambda_2\bar{v}_2+\ldots+\lambda_k\bar{v}_k = \bar{o} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

Bezit V een onafhankelijk stelsel $\bar{\bar{v}} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_n\}$ zodat iedere $\bar{x} \in V$ zich als lineaire combinatie $\bar{x} = x_1\bar{v}_1+\ldots+x_n\bar{v}_n$ van $\bar{\bar{v}}$ laat schrijven, dan geldt:

a V heet n-dimensionaal;

b ieder geordend onafhankelijk stelsel van V, waarin zich iedere $\bar{x} \in V$, als boven bij $\bar{\bar{v}}$, laat uitdrukken bevat n vectoren en heet een basis van V. De getallen $x_1, \ldots, x_n$ zijn door $\bar{\bar{v}}$ ondubbelzinnig bepaald en heten de kentallen van $\bar{x}$ t.o.v. $\bar{\bar{v}}$.

c zijn $\bar{\bar{v}}$ en $\bar{\bar{v}}^*$ bases van V en $x_1, x_2, \ldots x_n$ resp. $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ de kentallen van $\bar{x}$ t.o.v. $\bar{\bar{v}}$ resp. $\bar{\bar{v}}^*$, dan is als

$$\bar{v}_j^* = \sum_{i=1}^{n} s_{ij}\bar{v}_i, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j^*\bar{v}_j^* = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{ij}x_j^*\bar{v}_i,$$

zodat

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}x_j^*, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

3 Een lineaire deelruimte D van V is een deelverzameling van V zodanig dat

$$\bar{a}, \bar{b} \in D \Rightarrow \bar{a}+\bar{b} \in D$$
$$\bar{a} \in D, \lambda \in L \Rightarrow \lambda\bar{a} \in D.$$

D is een vectorruimte. Is V n-dimensionaal dan heeft V deelruimten van de dimensies 0, 1, 2, ..., n.
Zijn D_1 en D_2 deelruimten van V dan is de doorsnede $D_1 \cap D_2$ ook een deelruimte van V. Ook de verbinding $D_1 \oplus D_2$, d.i. de verzameling van alle vectoren $\bar{d}_1+\bar{d}_2$ met $\bar{d}_1 \in D_1, \bar{d}_2 \in D_2$, is een deelruimte van V.
Er geldt

$$\dim D_1+\dim D_2-\dim (D_1 \cap D_2) = \dim (D_1 \oplus D_2) \leq \dim V.$$

Aktie koppeling

Een voorbeeld van computergebruik in een havo-klas

G. A. VONK
's-Gravenhage

Inleiding

In het cursusjaar 1969–1970 heeft voor het eerst op een 13-tal scholen een experiment onder auspiciën van de C.M.L.W. in computerkunde plaatsgevonden. In aansluiting op het verslag van dit experiment heb ik een enkele ervaring op schrift gesteld. Dit betreft een vierde leerjaar van de havo-afdeling van de scholengemeenschap 'de Populier' in Den Haag. Computerkunde is van de bedoelde 17 leerlingen een keuzevak van twee wekelijkse lesuren. U moet hieruit echter niet concluderen dat alle leerlingen een duidelijke exacte aanleg vertonen, een minderheid volgt zelfs geen wiskunde. De eerste vijf maanden van het leerjaar werden besteed aan het kennismaken met het fenomeen computer en de wijze waarop de machine door de mens wordt geïnstrueerd (programmeertaal ECOL). Het laatste onderwerp hiervan is de rij (het array), waaronder verstaan wordt: een eindig aantal geïndiceerde variabelen. Van zo'n rij wordt gebruik gemaakt in het geval men naar willekeur moet kunnen beschikken over een meestal groot aantal in het computergeheugen op te bergen gegevens. Na behandeling van dit onderwerp en bijbehorende vraagstukken werd door de leerlingen nog behoefte gevoeld aan meer oefening in dit onderwerp.

Aktie koppeling

Door een van de leerlingen werd voorgesteld een enquête te houden en de daaruit verkregen gegevens als rij in het geheugen op te slaan. Allerlei voorstellen voor onderzoeken kwamen nu uit de klas naar voren, maar bij al die voorstellen bleek het mogelijk om de gegevens onmiddellijk na binnenkomst te verwerken, bijvoorbeeld te rubriceren of de numerieke gegevens (voor het berekenen van een gemiddelde) te sommeren. Daarna hoefden deze gegevens niet meer beschikbaar te zijn, zodat verdere aanwezigheid in het computergeheugen zinloos en ongewenst was. Teleurstelling onder de aanwezigen!
Het gebruik van de rij is pas zinvol als de computer alle gegevens tot het eind toe nodig heeft. Als voorbeeld van een dergelijke enquête noemde ik het zoeken van mogelijk geschikte huwelijkspartners per computer.

Ik had onmiddellijk spijt van dit voorbeeld, want de gedachte aan een dergelijke toepassing op eigen school leek hun niet alleen leerzaam, maar ook heel nuttig en was daarom niet meer uit hun hoofd te praten. Ik stemde uiteindelijk toe onder de voorwaarden dat al het mogelijke gedaan moest worden om moeilijkheden, klachten en het krenken van gevoelens te voorkomen en dat zij de organisatie volledig in eigen hand zouden houden. De tafeltjes werden in het lokaal samengevoegd tot een grotere vergadertafel en de 17 kwamen tot een levendig gesprek, waaruit ik mij bescheiden terugtrok. In de volgende les computerkunde werd de vergadering voortgezet, waarbij zij ontdekten dat er tot dan toe rommelig vergaderd was en dat ze vergeten waren over welke aspecten men het de vorige keer eens was geworden. Op mijn vraag wat ze daaraan dachten te doen, kwam de conclusie dat een voorzitter en een secretaris onmisbaar waren. Beide functionarissen werden uit hun midden gekozen. Ik zal u niet het verloop van de volgende vergaderingen beschrijven en volstaan met wat eindconclusies en de constatering dat in deze lessen de vergadertechniek snel verbeterde, dat de leerlingen zich duidelijk en zakelijk gingen uitdrukken.

Conclusies.

1 Toestemming zou gevraagd worden aan de rector, conrector-vierde klas en erbij betrokken (klasse)leraren.

2 Er zou een enquête plaatsvinden die een relatie tot stand zou brengen tussen jongens- en meisjesleerlingen.

3 Deze relatie zou zo min mogelijk moeten lijken op een huwelijksaanbeveling.

4 Een ongeveer gelijk aantal jongens en meisjes was wenselijk, daarom werd deelname opengesteld aan alle vierde klas-havoleerlingen en de meisjes van de vierde klas-hbs.

5 Deelname was niet verplicht.

6 Uit de vergadering zijn werkgroepjes afgesplitst ter verzorging van onderdelen: organisatie van de enquête, ontwikkeling van het computerprogramma, verzorging van het stencilwerk. De inhoud van de enquête werd door de totale vergadering bepaald.

Uitvoering

Het enquêteformulier vindt u als bijlage 1 op blz. 219.
Mede op grond van dit formulier werd toestemming verkregen van de schoolleiding. In de lijst komen vragen voor, waarvan de antwoorden buiten beschouwing zouden worden gelaten. Vraag (4) omdat ze verwachtten dat toch iedereen deze met ja zou beantwoorden, vraag (7) om de tegengestelde reden, vraag (10) en vraag (13) omdat de antwoorden wel gelijk, respectievelijk tegengesteld zouden zijn aan dat van vraag (8). Deze conclusies laat ik graag voor rekening van de leerlingen. Het voordeel is dat maar negen gegevens per deelnemer verwerkt behoefden te worden, terwijl met 13 vragen het formulier een niet te pover

aanzien had. Een 'ja' op het formulier zou als een 1 aan de computer worden meegedeeld en een 'nee' als nul. Verder kreeg elke deelnemer een nummer, zodat per deelnemer nu tien numerieke gegevens zouden komen. Deze tien gegevens konden onderaan het formulier door de enquêteurs in de hokjes worden ingevuld, dit ter vereenvoudiging van het verponsen van de gegevens.
In het computerprogramma werd nu gebruik gemaakt van de volgende negen rijen: leef(i), gesl(i), leng(i), klas(j), spor(i), opva(i), haar(i), uitg(i) en aard(i), waarin i het nummer van de deelnemer(neemster) is. Voor een relatie tussen twee deelnemers (nummers i en j) achtten de ontwerpers de volgende voorwaarden noodzakelijk.

$gesl(i) \neq gesl(j)$ dus tegengestelde sexe. Tevens volgt hieruit $i \neq j$.
We nemen (in afwijking van het programma) nu verder aan dat $gesl(j) = 0$ (j is het nummer van een jongen)
$leef(j)+1 \geqslant leef(i)$ de jongen mag niet meer dan 1 jaar jonger zijn dan het meisje.
$klas(i) = klas(j)$, $spor(i) = spor(j)$ } gelijke ideeën over klassieke muziek en sport.
$aard(i) \neq aard(j)$ tegenpolen trekken elkaar aan!

Verder werd geëist dat aan minstens twee van de volgende vier voorwaarden werd voldaan.

De waarheid van $leng(i) = 1 \Rightarrow leng(j) = 1$ aan een lang meisje wordt geen kleine jongen toegevoegd.
$opva(i) = opva(j)$, $haar(i) = haar(j)$, $uitg(i) = uitg(j)$ } gelijke meningen over de vragen (8), (9) en (11)

Dat de eisen bij hooguit honderd deelnemers (het bleken er 89 te zijn) niet te streng gesteld konden worden werd intuïtief aangevoeld. De 'output' had het volgende uiterlijk:

DEELNEMER NUMMER +43: .... (naam werd later met de hand ingevuld)

en daarna (al naar gelang het geval) drie varianten

* DIT ZIJN DE NUMMERS VAN DEGENEN MET ONGEVEER DEZELFDE BELANGSTELLING ALS JIJ. RAADPLEEG BIJGAANDE LIJST VOOR DE NAMEN.

* DIT IS HET NUMMER VAN DEGENE MET ONGEVEER DEZELFDE BELANGSTELLING ALS JIJ. RAADPLEEG BIJGAANDE LIJST VOOR DE NAMEN.

* DOOR HET BEPERKTE AANTAL DEELNEMERS IS ER NIEMAND GEVONDEN MET PRECIES DEZELFDE BELANGSTELLING ALS JIJ. (Voelt u het doekje voor het bloeden?)

Het benodigde programma werd in zijn uiteindelijke versie door één jongen geschreven en bij het testen, tot mijn verbazing, foutloos bevonden (zie bijlage 2). Het verkrijgen en verponsen en verwerken van de gegevens ging zonder incidenten. Het door de computer gedrukte vel met resultaten werd versneden in strookjes. Elk resultatenstrookje werd vastgeniet aan het oorspronkelijke vragenformulier en een lijst met genummerde namen van deelnemers.

Nabespreking

Leerzaam was, dat het geheel toch niet foutloos verliep. Bij een steekproef bleek een koppeling tot stand gekomen te zijn tussen twee mannelijke deelnemers. In eerste instantie werd het programma verantwoordelijk gesteld, maar hoe zij ook zochten, de fout werd daarin niet gevonden. Na tien minuten vond één van de leerlingen de fout in de verponsing van de gegevens. Deelnemer 19 had nummer 17 gekregen en de gegevens van de echte nummer 17 waren daardoor in het ongerede geraakt (zie bijlage 3). Dit kon in de deelnemerslijsten worden gewijzigd en er werd een deputatie gezonden naar deelneemster 17 (een heel timide meisje) met de mededeling dat zij door een fout, beslist buiten haar schuld, van verdere deelneming was uitgesloten.
Verder bleek deelneemster 15 een blanco formulier te hebben ingediend (hetgeen uitdrukkelijk was toegestaan). De oorspronkelijke afspraak was om in zo'n geval de sexe met -1 aan te geven (wat op het formulier ook gebeurd was) en dat in het programma van de geslachten zou worden geëist: $\text{gesl}(i)+\text{gesl}(j) = 1$. Deze eis zou blanco formulieren hebben verworpen. De programmeur had echter geschreven: $\text{gesl}(i) \neq \text{gesl}(j)$, zodat nu ineens een koppeling van nummer 15 met alle niet blanco formulieren tot stand kwam. Een bezwaar was dit niet, want de naam van nummer 15 was onbekend en werd ook niet in de deelnemerslijst opgenomen.

Conclusies

Het hierbij gegeven voorbeeld dient niet ter navolging. Daarvoor is het benodigde aantal lesuren te groot en wordt van de leerlingen een vaak te grote mate van subtiliteit vereist. De reden dat ik toch het bovenstaande aan u ter lezing aanbood is, dat hierin een aantal facetten van het nieuwe leervak naar voren komen.

a De leerlingen leren een min of meer complex probleem analyseren. Welk deel is puur routinewerk, bestemd voor de machine? Welke eisen kunnen en moeten gesteld worden?

b De leerlingen leren organiseren. Het aanbrengen van een taakverdeling, het treffen van voorbereidende maatregelen.

c De leerlingen leren werken in groepsverband en leren vergaderen. De gesignaleerde verbeteringen in vergadertechniek en spreekvaardigheid kwamen overigens tot stand door onderlinge kritiek en nauwelijks door mijn toedoen.

De spreekvaardigheid kwam ook van pas toen het project tegenover medescholieren en leraren moest worden toegelicht en verdedigd.

d Het verkrijgen van zelfkritiek. Geen enkele fout was te wijten aan de machine, maar aan pons- en programmafouten, die door de ploeg bij voorafgaande controle niet waren ontdekt. De enige organisatiefout was de lange tijd tussen enquête en resultaatverstrekking, doordat de paasvakantie er tussen viel.

Mijns inziens is geen enkel leervak zo geschikt om bovengenoemde vaardigheden aan te kweken. Zelfs durf ik te zeggen dat dit gebied in het Nederlandse onderwijs tot nu toe volmaakt is verwaarloosd.

e Het leren mathematiseren. Wat dacht u van een poging in de richting van:

$$\text{leng(i)} \times \text{gesl(i)} \times (1-\text{leng(j)}) + \text{leng(j)} \times \text{gesl(j)} \times (1-\text{leng(i)}) = 0$$

om in één opdracht de eis weer te geven dat geen lang meisje een jongen van klein postuur krijgt? (Waarbij gesl(i) $\neq$ gesl(j) maar niet noodzakelijk j de jongen is). Deze poging bereikte niet helemaal de hier aangegeven perfectie en werd niet in het programma opgenomen.

f Resultatenanalyse. Afgezien van de foutopsporing gaven de resultaten aanleiding tot verschillende beschouwingen, zoals het opstellen van het hier getoonde sjans-histogram (bijlage 4).

Hierin zijn drie deelnemers aangegeven aan wie geen enkele gelijkgezinde kon worden medegedeeld, te weten de dames 15 (blanco formulier) en 17 (ponsfout) en nog een jongeman. Deze jongen bleek overigens vaste verkering te hebben met een meisje van buiten school, dat dus niet aan de aktie-koppeling had deelgenomen.

Bijlage 1, *het enquêteformulier*

17 leerlingen uit de vierde klas-havo vragen je de onderstaande vragenlijst in te vullen. De antwoorden zullen door een computer worden verwerkt. Voor deze 17 leerlingen is dit een oefening in het gebruiken van een computer. Als deze proefneming lukt zal na enige tijd aan elke deelnemer(neemster) een lijstje worden uitgereikt waarin een aantal medeleerlingen zijn vermeld die dezelfde belangstelling hebben.

Dit mag misschien een aanwijzing zijn voor een afspraakje, maar is zeker *geen* poging tot *huwelijksbemiddeling*. Hoewel je dus aan deze resultaten geen enkele waarde moet hechten, word je wel verzocht de volgende vragen naar beste weten te beantwoorden, omdat anders de proef bij voorbaat mislukt.

Geheimhouding van de verstrekte gegevens is verzekerd.

VRAGENLIJST

Naam:. . . . . (1) Leeftijd: . . . . jaar

Je kunt de vragen met *ja* beantwoorden door het bijbehorende *hokje zwart* te maken.

(2) Ben je van het vrouwelijk geslacht?

(3) Ben je langer dan 1,70 meter?

(4) Hou je van popmuziek?

(5) Hou je van klassieke muziek?

(6) Doe je buiten school aan sport?

(7) Ga je graag naar school?

(8) Val je graag op door uiterlijk of kleding?

(9) Ben je een voorstander van de lange haardracht bij jongens?

(10) Ben je een voorstander van de maxi-mode?

(11) Ga je meer dan twee maal per week uit?

(12) Vind je jezelf stil van aard?

(13) Kun je stijldansen?

Hieronder niet schrijven.


```
      START
      TEKST: = "MATCHMAKER, HAVO 4, POPULIER, DEN HAAG"
      NR
      NR
      NR
      G: = LEES
      RIJ (1 : G) LEEF
      RIJ (1 : G) GESL
      BITRIJ (1 : G) LENG
      BITRIJ (1 : G) KLAS
      BITRIJ (1 : G) SPOR
      BITRIJ (1 : G) OPVA
      BITRIJ (1 : G) HAAR
      BITRIJ (1 : G) UITG
      BITRIJ (1 : G) AARD
 2    I: = LEES
      LEEF(I): = LEES
      GESL(I): = LEES
      LENG(I): = LEES
      KLAS(I): = LEES
      SPOR(I): = LEES
      OPVA(I): = LEES
      HAAR(I): = LEES
      UITG(I): = LEES
      AARD(I): = LEES
      ALS I = G DAN 3 ANDERS 2
 3    I: = 0
 4    I: = I + 1
      ALS GESL(I) = 1 DAN 5 ANDERS 6
 5    TEKST: = "DEELNEEMSTER NUMMER"
      NAAR 7
 6    TEKST: = "DEELNEMER NUMMER"
 7    SCHRIJF (4, 0): = I
      TEKST: = " :......................."
      NR
      TEKST: = "RESULTAAT:"
      P: = 0
      J: = 0
 8    J: = J+1
      ALS GESL(I) = GESL(J) DAN 28 ANDERS 9
 9    ALS GESL(I) = 1 DAN 10 ANDERS 11
10    A: = LEEF(J)+Z
      ALS A < LEEF(I) DAN 28 ANDERS 12
11    A: = LEEF(I)+1
      ALS A < LEEF(J) DAN 28 ANDERS 12
12    ALS KLAS(I) = KLAS(J) DAN 13 ANDERS 28
13    ALS SPOR(I) = SPOR(J) DAN 14 ANDERS 28
14    ALS AARD(I) = AARD(J) DAN 28 ANDERS 15
15    K: = 0
      ALS GESL(I) = 1 DAN 16 ANDERS 18
16    ALS LENG(I) = 1 DAN 17 ANDERS 19
```

```
17    ALS LENG(I) = LENG(J) DAN 19 ANDERS 20
18    ALS LENG(J) = 1 DAN 17 ANDERS 19
19    K: = K+1
20    ALS OPVA(I) = OPVA(J) DAN 21 ANDERS 22
21    K: = K+1
22    ALS HAAR(I) = HAAR(J) DAN 23 ANDERS 24
23    K: = K+1
24    ALS UITG(I) = UITG(J) DAN 22 ANDERS 26
25    K: = K+1
26    ALS 1 < K DAN 27 ANDERS 28
27    SCHRIJF (4, 0): = J
      P: = P+1
28    ALS J = G DAN 29 ANDERS 8
29    ALS P = 0 DAN 30 ANDERS 31
30    NR
      TEKST: = "DOOR HET BEPERKTE AANTAL DEELNEMERS IS ER
                                              NIEMAND GEVONDEN"
      NR
      TEKST: = "MET PRECIES DEZELFDE BELANGSTELLING ALS JIJ"
      NAAR 35
31    ALS P = 1 DAN 32 ANDERS 33
32    NR
      TEKST: = "DIT IS HET NUMMER VAN DEGENE MET ONGEVEER
                                                     DEZELFDE"
      NAAR 34
33    NR
      TEKST: = "DIT ZIJN DE NUMMERS VAN DEGENEN MET ONGEVEER
                                                     DEZELFDE"
34    NR
      TEKST: = "BELANGSTELLING ALS JIJ. RAADPLEEG BIJGAANDE LIJST
                                               VOOR DE NAMEN."
35    NR
      NR
      NR
      NR
      NR
      NR
      NR
      NR
      ALS I = G DAN 36 ANDERS 4
36    KLAAR
```

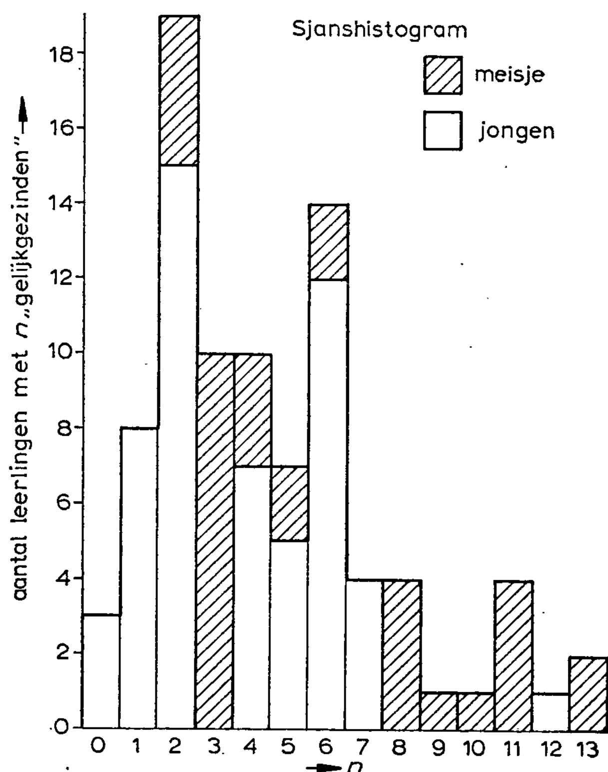
N.B. In bovenstaand programma worden variabelen, in strijd met de conventie van ECOL, in hoofdletters aangegeven. Deze versie is namelijk afgedrukt door een regeldrukker, die geen kleine letters kan weergeven.

Bijlage 3

Een gedeelte van de gecodeerde enquêteformulieren. Men lette op de ponsfout bij regel 19.

+89
+1+16+1+1+0+1+1+1+0+0
+2+15+1+1+0+0+1+1+1+0
+3+16+1+1+0+0+0+1+0+0
+4+16+1+1+1+0+0+0+0+1
+5+15+1+0+0+1+1+1+1+0
+6+16+1+0+1+1+1+1+1+0
+7+15+1+1+1+0+1+1+0+0
+8+15+1+1+1+0+0+1+0+0
+9+15+1+0+1+1+0+0+0+1
+10+17+1+0+1+1+0+1+0+0
+11+16+1+0+1+1+1+1+0+0
+12+16+1+0+0+1+0+1+1+0
+13+15+1+1+1+0+0+0+0+0
+14+15+1+0+1+0+0+0+0+0
+15+0−1+0+0+0+0+0+0+0
+16+18+0+1+1+1+1+1+0+1
+17+17+1+1+1+1+0+0+0+0
+18+18+0+1+1+1+1+1+0+1
+17+18+0+1+0+1+0+0+1+0
+20+17+0+1+1+0+0+0+0+0
+21+17+0+1+0+1+0+1+0+1
+22+17+0+1+0+0+0+0+1+0
+23+17+0+1+0+0+0+1+1+1
+24+18+1+1+0+1+0+1+1+0
+25+19+1+0+0+0+1+1+1+1

Bij age 4



Openingsrede

door de Heer Dr. J. K. van den Briel ter gelegenheid van de jaarvergadering op zaterdag 19 december 1970 in het Transitorium van het Universteitscentrum 'De Uithof' te Utrecht.

Dames en Heren,

Hiermee verklaar ik deze jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren voor geopend.

Het is voor mij een groot genoegen u, namens het bestuur, hier in de Uithof te kunnen verwelkomen. Het is gewoonte een aantal aanwezigen nog persoonlijk te begroeten, niet omdat de anderen minder welkom zouden zijn, maar omdat deze speciaal door het bestuur zijn uitgenodigd.

Het zijn onze ereleden Prof. Dr. O. Bottema en Dr. Joh. H. Wansink, verder de inspecteur E. H. Schmidt, de vertegenwoordiger van Velines de Heer Drs. F. Th. H. Dekkers, van de redactie van Euclides de Heer G. Krooshof en van de uitgeversmaatschappij Wolters-Noordhoff de Heer Drs. A. B. Oosten. Ook heten we welkom de sprekers van vandaag Prof. Dr. J. C. H. Gerretsen en de Heren G. A. Vonk en M. Sjamaar.

Het doet ons veel genoegen dat hier namens de Belgische Vereniging van Wiskundeleraren aanwezig zijn de Heer en Mevr. Broeckx. We hopen dat hiermee een periode van meer en vruchtbare contacten is begonnen.

Gelukkig is dit jaar het weer meer met ons dan een jaar geleden, toen door buitengewone gladheid slechts ong. 40 personen aanwezig waren op de jaarvergadering in Esplanade.

De Wet op het Voortgezet Onderwijs is vergeleken met toen een jaar ouder geworden (evenals wij allen trouwens) en ik geloof dat wij kunnen zeggen een overzicht te hebben over de eerste 2 jaren: de 1e en de 2e klasse van onze nieuwe school- en onderwijsorganisatie.
Het is natuurlijk niet waar dat alle moeilijkheden van die twee klassen opgelost zijn en we een juist idee hebben hoe het in de toekomst met ons wiskundeonderwijs in die 1e en 2e klas van de verschillende schooltypen van het voortgezet onderwijs moet gaan.
Maar voor de grote groep van collega's, die niet bij de experimenten betrokken was, is wel wat meer licht gekomen in een vroeger duistere situatie.

Noodzakelijk is wel, dat we de ervaringen in deze eerste twee jaren zeer kritisch bekijken en niet moeten aarzelen om aan de hand hiervan en die van de eerstvolgende jaren, eventueel bij te sturen.

We moeten niet de illusie hebben, dat we het direct goed hebben gedaan.

Onze langjarige onderwijs-ervaring mag ons niet blind maken voor het feit, dat we nu een andere soort wiskunde dikwijls op een andere manier doorgeven en dat vereist van iedereen aanpassing en correctie, waaraan het gelukkig niet ontbreekt.

Belangrijker is echter om nu naar de toekomst te zien. Onze mavo-collega's krijgen in dit schooljaar al te maken met het eindexamen mavo-3 en voor hen speciaal zullen de eerstvolgende maanden niet gemakkelijk zijn. Het bestuur wenst hen sterkte bij het vervullen van hun taak waar ze, door de snelle invoering van de Mammoetwet, misschien buiten hun schuld, weinig voor zijn voorbereid. 't Lijkt mij verder dat voor ons op dit moment, de beide mavo-eindexamens en de wiskunde in de bovenbouw van het havo, compleet met leerplan, keuzepakketten en voorbereiding voor het eindexamen het belangrijkste probleem is en waar dus vele collega's talloze uren werk en inspanning aan besteden. Het werk van de Centrale Commissie Begeleiding Mavo Wiskunde is voor velen in de mavo-sector een grote steun. Opgemerkt mag nog wel eens worden hoe wij als wiskundedocenten bevoorrecht zijn boven collega's van andere vakken, door het vele en vooral vroegtijdige werk van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, die gezegd heeft, dat wij, docenten, nu vrij goed weten waar we met het wiskundeonderwijs in Nederland heen gaan. Vier leden van het Bestuur zijn nu lid van deze Commissie.

Bij het vwo in de toekomst, zullen we de volgende cursus moeten beginnen met de Vectormeetkunde, de op geheel andere wijze behandelde meetkunde, waar vele oude bekende onderwerpen geheel uit verdwenen zijn. Ik heb de indruk dat de collega's die aan het experiment meewerkten, zeer enthousiast zijn over de grote voordelen, die deze wijze van behandelen heeft. Jammer is dat op dit moment nog slechts één leerboek beschikbaar is.
In het algemeen is een toestand van te weinig verschillende boeken en daardoor een overheersing van enkele, een verarming van het wiskundeonderwijs.

Nog verder vooruitziende, wordt het ook tijd eens na te gaan denken over de keuzeonderwerpen voor Wiskunde II en de eindexamens, zowel wat de organisatie van het schoolonderzoek als wat het niveau en de aard der vraagstukken voor het centrale schriftelijke examen betreft.

De Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek is nu een officieel onderdeel van Wiskunde I en ook daar zullen we onze gedachten over moeten laten gaan.

't Stemt tot voldoening dat in het afgelopen jaar aan al deze problemen door bestuursleden en gewone leden van de Vereniging veel gedaan is en 't is zeker op zijn plaats om hier onze waardering en dank uit te spreken.

In september werd een bijeenkomst georganiseerd, waar de experiment-eindexamens van dit jaar in een forum-discussie besproken werden. Voor het mavo-eindexamen waren ong. 200 collega's gekomen en voor dat van het vwo ongeveer 80.

Na de bespreking van de vraagstukken zelf, konden vele vragen beantwoord worden over het nieuwe programma en de nieuwe organisatie. Een dergelijke bijeenkomst zal zeker volgend jaar herhaald worden.

De Commissie die oefenvraagstukken voor het centrale schriftelijk eindexamen vwo opstelt, is reeds geruime tijd aan het werk en hoopt in de loop van het volgende cursusjaar zijn resultaat te publiceren in een boekje dat voorlopig '251 opgaven' gedoopt is.
De dit jaar ingestelde Nomenclatuurcommissie werkt in stilte en zal binnenkort wel met het eerste resultaat komen. Dit zal een interimverslag zijn over logica, verzamelingenleer en algebra-onderbouw en zal in Euclides verschijnen.
Over de Didaktiekcommissie zal vanmiddag nog gesproken worden. Hier alleen de opmerking dat deze Commissie ontstaan is door een samentreffen van een suggestie van de heer Westerhof in de vorige jaarvergadering en bepaalde opvattingen die reeds hierover in de vereniging bestonden.
U zult, hoop ik, de artikelen in Euclides van de heren Van Dormolen en Broekman gelezen hebben, waarin een zeer ambitieus plan ontwikkeld wordt, dat misschien het beste een onderwijswerkplan voor alle scholen van Algemeen Voortgezet Onderwijs te noemen is. Wij willen duidelijk stellen dat het beslist niet de bedoeling is, om het leerplan nu zo snel mogelijk weer overhoop te gooien, maar even duidelijk is, dat in de loop der zeventiger jaren wijzigingen in dit leerplan nodig zijn op grond van maatschappij-ontwikkelingen.

Vele besprekingen zijn gehouden met de Raad van Leraren, 2e afdeling, ter voorbereiding van het z.g. nieuw-Lochemse overleg, speciaal over ongedeeld vwo en nieuwe basistabellen. In verband hiermee is er ook een overleg gegroeid tussen de verschillende vakgroepen, dat zijn de verenigingen van docenten in de afzonderlijke vakken, en er zou misschien uit deze vaksgewijze vertegenwoordigingen van de leraren een gemeenschappelijk standpunt kunnen groeien over verschillende belangrijke punten, zoals b.v. de basistabellen.

Ook in dit 2e jaar na de openstelling van de vereniging voor de wiskundedocenten bij het mavo is gebleken, dat dit een juiste beslissing was. Het Bestuur hoopt dat het geslaagd is om dit jaar een zo gevarieerd mogelijk programma aan te bieden. Een gevolg van het feit dat nu ook deze mavodocenten door onze Vereniging vertegenwoordigd worden, zal moeten zijn, dat over aangelegenheden de mavowiskunde betreffende, onze vereniging één der aangewezen instanties is om hierover adviezen te geven.

De vakantiecursus van het Mathematisch Centrum, welke in augustus in het gebouw der Technische Hogeschool in Eindhoven werd gehouden, was een groot succes en een woord van dank voor de organisatoren is zeer zeker op zijn plaats.
Daarentegen was de opkomst op het 18e congres van leraren in de wiskunde en natuurwetenschappen ver beneden de verwachting, hoewel de daar gehouden

lezingen over het thema:'*Weten en geweten in de wetenschap*' zeer interessant waren. Er moet toch, gezien de geringe opkomst, overwogen worden of een voortzetting van deze congressen zinvol is.
Als in de toekomst de Instituten voor de leraarsopleiding gaan werken waar veel hoogwaardig personeel nodig is, zal zich nog sterker dan nu een ontwikkeling voltrekken, die tegenwoordig al zorg baart, gezien de personeelsuitbreiding van Pedagogische Centra, Pedagogische Instituten der Universiteiten en C.M. L.W. Dit ligt in de lijn der ontwikkeling en de collega's die het voortgezet onderwijs verlaten en daar heen gaan doen veel en belangrijk werk voor ons allen, maar 't is toch noodzakelijk dat bij het voortgezet onderwijs zelf een voldoend grote kern van goede en ervaren leraren overblijft.

De samenwerking met de Belgische wiskunde collega's op het gebied van de uitwisseling van de maandbladen en de mogelijkheid om deze op voordelige voorwaarden te ontvangen wordt door het Bestuur erg prettig gevonden en we hopen op wat nader contact.

De heer Smeur uit Breda, die nu het beheer van de leesportefeuille in handen heeft, verdient onze hartelijke dank; de leden gelegenheid geven met de moderne litteratuur kennis te maken, hoort zeker bij de service die onze vereniging hoort te bieden.
Het aantal leden van de Vereniging bedraagt 1481. Veranderingen in een enthousiast en erg prettig werkend bestuur zijn er gelukkig niet, daar er geen tegenkandidaten zijn gesteld.
Maar wel heeft Dr. van der Neut ontslag gevraagd als lid van de Redactie van Euclides. Na zijn pensionering heeft hij zich consequent uit de vele nevenfuncties, die hij had, teruggetrokken. Begrijpelijk maar jammer. De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren heeft veel van zijn deskundigheid en werkkracht geprofiteerd: niet alleen als bestuurslid en redactielid, maar vooral ook door talloze adviezen.

Ik stel het zeer op prijs om hem heel hartelijk te danken voor alles wat hij binnen en buiten de vereniging voor het wiskundeonderwijs in Nederland heeft gedaan. Ik hoop dat onze Vereniging een goed jaar tegemoet gaat, en namens het Bestuur wens ik u allen een geslaagde jaarvergadering toe.

Oude jaargangen van Euclides

Ir. M. F. van Dun, Donker Curtiusstraat 5, Delft, tel. 01730-21518 (onder kantoortijd ook 070-901317) heeft van Euclides de jaargangen 1958-heden voor liefhebbers beschikbaar. Zij kunnen op een nader overeen te komen tijdstip gratis bij hem worden afgehaald.

Programma's

van de Eindexamens mavo-havo-vwo

Bij beschikking van de Staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen (26-10-1970-AVO 441542 - Staatscourant nr 229 - 26-11-1970) zijn de definitieve programma's voor de hierboven vermelde eindexamens vastgesteld.

Wij drukken hieronder de programma's af voor het vak wiskunde. In het volgende nummer hopen wij commentaar te kunnen geven.

Programma Wiskunde eindexamen m.a.v.o.-3 m.i.v. 1972

Bij het schoolonderzoek en bij het schriftelijk examen wordt onderzocht in hoeverre de kandidaat kennis heeft van en inzicht heeft in de volgende onderwerpen:

Lijnspiegeling, puntspiegeling, translatie, rotatie, vermenigvuldiging.
Congruentie en gelijkvormigheid van figuren.
Metriek: lengten, oppervlakten en inhouden; de stelling van Pythagoras.
Puntverzameling in het vlak.
Lineaire vergelijkingen en ongelijkheden met één veranderlijke.
Relaties: de grafiek van een lineaire relatie; twee lineaire vergelijkingen met twee veranderlijken.
Functies; de grafiek van een functie; lineaire en eenvoudige kwadratische functies; eenvoudige kwadratische vergelijkingen.
De goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens.
Eenvoudige berekeningen van hoeken en afstanden in het vlak en in de ruimte.
Eenvoudige beschrijvende statistiek.

Duur van het schriftelijk examen: $2 \times 1\frac{1}{2}$ uur.

In verband met de invoering van een modern programma voor wiskunde kan de inspectie bepalen dat één of meer onderwerpen bij het schriftelijk examen niet aan de orde zullen worden gesteld. Indien de inspectie van deze mogelijkheid gebruik maakt, wijst zij voor de aanvang van het schooljaar waarin het examen zal worden afgenomen, bovenbedoelde onderwerpen aan.

Programma Wiskunde eindexamen m.a.v.o.-4 m.i.v. 1972

Bij het schoolonderzoek en bij het schriftelijk examen wordt onderzocht in hoeverre de kandidaat kennis heeft van en inzicht heeft in de volgende onderwerpen:

Lijnspiegeling, puntspiegeling, translatie, rotatie.

Congruentie van figuren.
Metriek: lengten, oppervlakten en inhouden; de stelling van Pythagoras.
Puntverzamelingen in het vlak
Lineaire vergelijkingen en ongelijkheden met één veranderlijke.
Relaties, in het bijzonder lineaire relaties; grafieken.
Twee lineaire vergelijkingen met twee veranderlijken; lineaire ongelijkheden met twee veranderlijken.
Functies; de grafiek van een functie; in het bijzonder lineaire en kwadratische functies.
Kwadratische vergelijkingen en ongelijkheden.
Vectoren in het vlak; vermenigvuldiging; gelijkvormigheid van figuren.
De goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens; sinusregel en cosinusregel.
Berekeningen van hoeken en afstanden in het vlak en in de ruimte.
In het vlak: vergelijkingen van lijn en cirkel; snijpunten en raaklijnen, hoeken en afstanden.
Beschrijvende statistiek.

Duur van het schriftelijk examen: 2 × 2 uur.

In verband met de invoering van een modern programma voor wiskunde kan de inspectie bepalen dat één of meer onderwerpen bij het schriftelijk examen niet aan de orde zullen worden gesteld. Indien de inspectie van deze mogelijkheid gebruik maakt, wijst zij voor de aanvang van het schooljaar waarin het examen zal worden afgenomen, bovenbedoelde onderwerpen aan.

Programma Wiskunde eindexamen h.a.v.o. m.i.v. 1973

Bij het schoolonderzoek en bij het schriftelijk examen wordt onderzocht in hoeverre de kandidaat kennis heeft van en inzicht heeft in de volgende onderwerpen:

Verzamelingen mede in verband met elementaire logische operaties.
Rationele functies; goniometische functies; grafieken; vergelijkingen en ongelijkheden.
Beginselen van differentiaalrekening: afgeleide van een functie; kettingregel; extreme waarden.
Logaritmen, logaritmische functie, exponentiële functie; grafieken; eenvoudige vergelijkingen en ongelijkheden.
In het vlak: vergelijkingen van lijn, cirkel en parabool; eenvoudige transformaties; eenvoudige puntverzamelingen; vectoren, inwendig produkt vectorvoorstelling van een lijn; snijpunten en raaklijnen, hoeken en afstanden.
In de ruimte: ligging van punten, lijnen en vlakken; berekeningen van hoeken en afstanden.

Beschrijvende statistiek.
Eenvoudige kansberekeningen.

Duur van het schriftelijk examen: 3 uur.

In verband met de invoering van een modern programma voor wiskunde kan de inspectie bepalen dat één of meer onderwerpen bij het schriftelijk examen niet aan de orde zullen worden gesteld. Indien de inspectie van deze mogelijkheid gebruik maakt, wijst zij voor de aanvang van het schooljaar waarin het examen zal worden afgenomen, bovenbedoelde onderwerpen aan.

Programma Wiskunde eindexamen v.w.o. in 1972 en 1973 aan avondscholen voor v.w.o.

Wiskunde I

Bij het schoolonderzoek en bij het schriftelijk examen wordt onderzocht in hoeverre de kandidaat kennis heeft van en inzicht heeft in de volgende onderwerpen:

Ter keuze van het bevoegd gezag:

a. De functies sin, cos, tan en hun grafieken.
Formules voor sin $(x \pm y)$, cos $(x \pm y)$, tan $(x \pm y)$, sin $2x$, cos $2x$, tan $2x$, sin $x \pm$ sin y, cos $x \pm$ cos y.
Goniometrische vergelijkingen en ongelijkheden, in het bijzonder

$$a \sin x + b \cos x + c \underset{<}{\overset{>}{=}} 0.$$

Continuïteit en discontinuïteit.
Limieten; oppervlakte en omtrek van de cirkel; asymptoten.
Differentiaalquotiënt: afgeleide functie; regels voor het differentiëren.
Raaklijn aan een grafiek; monotonie van een functie; extremen (ook randextremen); buigpunt.
De functies arcsin, arccos, arctan en hun grafieken.
Differentiëren van wortelfuncties, goniometrische functies en cyclometrische functies.

Primitieve functies; bepaalde integraal; partiële integratie; oneigenlijke integraal.
Toepassing op berekeningen van oppervlakten en inhouden.
Het getal e; logaritmische en exponentiële functies en hun grafieken; differentiëren van deze functies.
Differentiaalvergelijkingen; lijnelementenveld; oplossen van eenvoudige differentiaalvergelijkingen,

dan wel:

b. Functies; de grafiek van een functie; lineaire en kwadratische functies; absolute waarde; lineaire en kwadratische vergelijkingen en ongelijkheden.
De functies sin, cos, tan en hun grafieken.
Formules voor sin $(x \pm y)$, cos $(x \pm y)$, tan $(x \pm y)$, sin $2x$, cos $2x$, tan $2x$, sin x $\pm$ sin y, cos x $\pm$ cos y.
Goniometrische vergelijkingen en ongelijkheden, in het bijzonder

$$a \sin x + b \cos x + c \overset{>}{\underset{<}{=}} 0.$$

Continuïteit en discontinuïteit.
Limieten; oppervlakte en omtrek van de cirkel; asymptoten.
Differentiaalquotiënt; afgeleide functie; regels voor het differentiëren.
Raaklijn aan een grafiek; monotonie van een functie; extremen (ook randextremen); buigpunt.
Differentiëren van rationale functies, wortelfuncties en goniometrische functies.
Primitieve functie; bepaalde integraal.
Toepassingen op berekeningen van oppervlakten en inhouden.
Het getal e; logaritmische en exponentiële functies en hun grafieken; differentiëren van deze functies.

Duur van het schriftelijk examen: 3 uur.

Wiskunde II

Bij het schoolonderzoek en bij het schriftelijk examen wordt onderzocht in hoeverre de kandidaat kennis heeft van en inzicht heeft in de volgende onderwerpen:

Onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken.
Berekeningen van hoeken en afstanden.
Prisma, piramide, cilinder, kegel en bol.
Eenvoudige verzamelingen van punten en lijnen; constructies.
Berekeningen van oppervlakte en inhoud van de genoemde lichamen.
Het begrip regelmatig veelvlak.
Cartesische coördinaten; vergelijking van een rechte lijn, cirkel, parabool, ellips en hyperbool.
Bepalingen van de snijpunten van rechte lijnen en krommen.
Raaklijnen aan de genoemde krommen.
Lijnen- en cirkelbundels.
Puntverzamelingen.

Duur van het schriftelijk examen: 3 uur.

Programma Wiskunde eindexamen v.w.o. m.i.v. 1974 aan dag- en avondscholen voor v.w.o.

Wiskunde I

Bij het schoolonderzoek en bij het schriftelijk examen wordt onderzocht in hoeverre de kandidaat kennis heeft van en inzicht heeft in de volgende onderwerpen:
De functies sin, cos, tan en hun grafieken.
Formules voor sin $(x \pm y)$, cos $(x \pm y)$, tan $(x \pm y)$, sin $2x$, cos $2x$, tan $2x$, sin $x \pm$ sin y, cos $x \pm$ cos y.
Goniometrische vergelijkingen en ongelijkheden, in het bijzonder

$$a \sin x + b \cos x + c \begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix} 0.$$

Continuïteit en discontinuïteit.
Limieten; oppervlakte en omtrek van de cirkel; asymptoten.
Differentiaalquotiënt; afgeleide functie; regels voor het differentiëren.
Raaklijn aan een grafiek, monotonie van een functie; extremen (ook randextremen); buigpunt.
De functies arcsin, arccos, arctan en hun grafieken.
Differentiëren van wortelfuncties, goniometrische functies en cyclometrische functies.
Primitieve functie; bepaalde integraal; partiële integratie; oneigenlijke integraal.
Toepassing op berekeningen van oppervlakten en inhouden.
Het getal e; logaritmische en exponentiële functies en hun grafieken; differentiëren van deze functies.
Differentiaalvergelijkingen; lijnelementenveld; oplossen van eenvoudige differentiaalvergelijkingen.
Inleiding tot de waarschijnlijkheidsrekening en de mathematische statistiek.

Duur van het schriftelijk examen: 3 uur.

In verband met de invoering van een modern programma voor wiskunde kan de inspectie bepalen dat een of meer onderwerpen bij het schriftelijk examen niet aan de orde zullen worden gesteld. Indien de inspectie van deze mogelijkheid gebruik maakt, wijst zij voor de aanvang van het schooljaar, waarin het examen zal worden afgenomen, bovenbedoelde onderwerpen aan.

Wiskunde II

Bij het schoolonderzoek en bij het schriftelijk examen wordt onderzocht in hoeverre de kandidaat kennis heeft van en inzicht heeft in de volgende onderwerpen:

In het vlak: vergelijkingen van lijn en cirkel; snijpunten en raaklijnen; vectoren; vectorvoorstelling van een lijn; inwendig produkt; hoeken en afstanden.
In de ruimte: vergelijkingen van vlak en bol; vectoren; vectorvoorstellingen van lijn en vlak; inwendig produkt; hoeken en afstanden.
Puntverzamelingen en eenvoudige verzamelingen van lijnen.
Afhankelijkheid en onafhankelijkheid van een stelsel vectoren; determinanten van de tweede en de derde orde; ligging van lijnen en vlakken ten opzichte van elkaar.
Orhonormale basis; normaalvector; normaalvergelijking.
Cirkel en bol; raaklijn en raakvlak.
De groep van translaties.
Lineaire afbeeldingen; matrices; de reguliere lineaire afbeeldingen als groep; orthogonale afbeeldingen; isometrie.
Het schoolonderzoek strekt zich bovendien uit over één onderwerp, te kiezen uit de navolgende onderwerpen: complexe getallen, topologie, getaltheorie, numerieke wiskunde, projectieve meetkunde, niet-euclidische meetkunde, logica, geschiedenis van de wiskunde, toepassingen van de analyse, of een ander vooraf door de inspectie goed te keuren onderwerp.

Duur van het schriftelijk examen: 3 uur.

In verband met de invoering van een modern programma voor wiskunde kan de inspectie bepalen, dat één of meer onderwerpen bij het schriftelijk examen niet aan de orde zullen worden gesteld. Indien de inspectie van deze mogelijkheid gebruik maakt, wijst zij voor de aanvang van het schooljaar waarin het examen zal worden afgenomen, bovenbedoelde onderwerpen aan.

De M.O.-examens

De Staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen brengt het navolgende ter kennis van belanghebbenden:
De examens ter verkrijging van de akten van bekwaamheid A en B tot het geven van middelbaar onderwijs in de wiskunde zullen met ingang van het kalenderjaar 1971 op de ondervermelde wijze worden afgenomen:

Wiskunde M.O. A

— naar keuze van de kandidaat:

1 het gehele examen of

2 een deelexamen, omvattende algebra en analyse of

3 een deelexamen, omvattende analytische meetkunde en projectieve en beschrijvende meetkunde.

Een voldoende cijfer voor algebra, analyse en analytische meetkunde, verkregen na schriftelijk en mondeling examen, geeft voor het desbetreffende onderdeel een vrijstelling, die gedurende twee jaren van kracht blijft.

Dit laatste geldt ook voor het onderdeel projectieve en beschrijvende meetkunde, dat uitsluitend mondeling wordt geëxamineerd.

Bij de totale einduitslag krijgt men, wanneer men één punt tekort komt om te kunnen slagen, na een maand een mondelinge herkansing.

Bij wijze van overgangsmaatregel zal een kandidaat, die in 1970 wordt afgewezen maar wel voor één of meer onderdelen een voldoende cijfer behaalt, voor dat onderdeel, resp. die onderdelen zijn vrijgesteld. Deze vrijstellingen blijven eveneens twee jaren geldig.

Wiskunde M.O. B

— naar keuze van de kandidaat:

1 het gehele examen of

2 een deelexamen, omvattende analyse en functietheorie of

3 een deelexamen, omvattende hoofdstukken uit de meetkunde.

Een voldoende eindcijfer, verkregen na schriftelijk en mondeling examen, geeft voor het desbetreffende onderdeel een vrijstelling, die gedurende twee jaren geldig blijft.

Bij totale einduitslag krijgt men, wanneer men één punt tekort komt om te kunnen slagen, na een maand een mondelinge herkansing.

Bij wijze van overgangsmaatregel zal een kandidaat, die in 1970 wordt afgewezen, maar wel voor één of meer onderdelen een voldoende eindcijfer behaalt, voor dat onderdeel, resp. voor die onderdelen, zijn vrijgesteld. Deze vrijstellingen blijven eveneens twee jaren van kracht.

De staatssecretaris,
namens deze,
de chef van de afdeling
Opleidingen en ontwikkeling
leerplannen,
E. L. Kruyne

W.V.O.

De Werkgemeenschap van Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs verzoekt ons de volgende oproep te plaatsen.

Oproep aan leraren en leerlingen van alle vormen van voortgezet onderwijs

VAKprojekten als eerste stap op weg naar projektonderwijs.
Zend uw ideeën of uitgewerkte projekten in!

Een werkgroep van de Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs (W.V.O.), waaraan kritiese leraren deelnemen, wil een verzameling aanleggen van konkrete VAKprojekten die nu al direct uitvoerbaar zijn voor een klas met zijn leraar.
Voorlopig wordt afgezien van 'geïntegreerde' projekten, waar als regel verschillende vakken en meerdere klassen tegelijk in (werk)weken bij betrokken worden.
De nog bestaande schoolorganisatie met een vast lesrooster en voorgeschreven leerstof sluit geïntegreerd projektonderwijs op uitzonderingen na, uit.
Daarom wordt begonnen met VAKprojekten die een leraar in de hem toegemeten lesuren door een klas kan laten uitvoeren. De werkgroep wil een inventarisatie maken van uw ideeën of uitgewerkte VAKprojekten. Ook wil zij stimuleren dat er nieuwe worden bedacht.
Als er genoeg VAKprojekten verzameld zijn, wil de werkgroep zo nodig een conferentie organiseren om de uitgave te bespreken. Voorlopig idee voor vorm van de uitgave is een losbladig systeem (passend in multomappen), dat later kan worden uitgebreid met nieuwe of gewijzigde VAKprojekten.

Als begrenzing voor deze opzet worden de volgende eisen gesteld:

1 De inhoud van het projekt moet worden benaderd *vanuit het vak van de betrokken leraar*. Grensoverschrijdingen naar andere vakken zijn onvermijdelijk.

2 Het uitgangspunt van het VAKprojekt moet liggen in problemen uit de *belangstellingswereld van tieners.*

3 Het VAKprojekt moet, uitgaande van in leerlingen levende aanknopingspunten, hun belangstelling richten op de *maatschappelijke realiteit buiten de school*. Of het projekt moet met gegevens uit het vak een *spelsituatie* maken in de klas.

4 De inhoud van het VAKproject behoeft zich *niet* te beperken tot de nu in het leerprogramma *voorgeschreven leerstof.*

5 In gewone lesuren moet een deel van het VAKprojekt uitgevoerd kunnen worden: bv. probleemstelling; organisatieschema van uit te voeren werkzaamheden; discussie over verzamelde gegevens; vastleggen van konklusies. Een deel van de werkzaamheden moet ook uitgevoerd kunnen worden *buiten de schoolmuren*: het verzamelen van gegevens op straat, in bibliotheken, bedrijven of in de resten van de vrije natuur.

6 Het doel van het VAKprojekt moet liefst niet beperkt blijven tot de leersituatie, maar kan tegelijk *dienstverlening zijn aan mensen buiten de klas*: schoolgemeenschap, buurtbewoners, vast ouders of *leerlingen van een andere school.*

Het is duidelijk dat niet ieder VAKprojekt aan alle eisen tegelijk kan voldoen. Om beter houte geven, een paar voorbeelden:

Vak Nederlands – vergelijkend onderzoek naar verslaggeving in verschillende kranten over een onderwijsprobleem. Daarna informatie verzamelen bij overheidsinstanties (gemeentehuis). Doel: voorlichting schoolleiding.

Vak Biologie – onderzoek naar in de buurt van de school levende vogelsoorten, gevolgd door bestudering theorie van hun leefgewoonten. Doel: voorlichting aan de buurtbewoners over hulp bij instandhouding van genoemde vogelsoorten.

Vak Wiskunde – vergelijkend statistisch onderzoek naar prijzen van artikelen in supermarkten, gespecialiseerde winkels en straatmarkt. Doel: voorlichting omwonenden van de school.

Vak Wiskunde – spel in de klas waarbij leerlingen punten voorstellen die zich moeten opstellen in bepaalde verzamelingen. Bij het noemen van transformaties zullen zij bewegingen uitvoeren (in steeds sneller tempo).

Vak Scheikunde – meting van watervervuiling door schoonmaakmiddelen. Doel: voorlichting moeders.

Vak Geschiedenis – het bestuderen van karakteristieke lichaamshoudingen en gebaren van aanhangers van in konflikt zijnde groepen in het verleden. Daarna observatie van gedrag van personen op straat of vergaderingen van politieke partijen. Slot: bewegingsspel in de klas.

Vak Natuurkunde – warenonderzoek van balpennen naar prijs, schrijflengte, vlekkerigheid enz. Doel: voorlichting medeleerlingen.

Vak Aardrijkskunde – in kaart brengen van braak liggende terreinen in de buurt van de school en plannen maken voor een mogelijke bestemming. Doel: dienst gemeentewerken op ideetjes brengen.

Wilt u aan deze opzet meewerken, dan kunt u
uiterlijk veertien dagen na het verschijnen van dit blad

1 uw VAKprojekt inzenden * aan Bureau W.V.O., Postbus 13, Purmerend in de vorm van:

a een verslag van en ervaringen met een uitgevoerd VAKprojekt **

b een model van een VAKprojekt **

c een suggestie voor een VAKprojekt **

en/of

2 zich opgeven voor deelname van een brainstorming voor het bedenken van een veelheid van onderwerpen voor VAKprojekten.

Bovendien wordt verzocht plaatsing van de oproep te bevorderen in de leerlingenkrant en/of op het prikbord van de school, om aldus ook de leerlingen te stimuleren tot het inzenden van projekten of tot deelname aan de brainstorming.

* Inzendingen zoveel mogelijk in overeenstemming met het volgende: formaat van multomapbladen (16½ × 21); tekst met zwart lint getypt; tekeningen in oost-Indische inkt; foto's contrastrijk.

** Een voorbeeld wordt u op aanvraag gaarne toegezonden door Bureau W.V.O., Postbus 13, Purmerend.

In voorbereiding is een film over een uitgevoerd projekt, waarvan de bedoeling is deze na gereedkomen aan scholen te verhuren.

Werkgroep Vakprojekten Bureau W.V.O.
Postbus 13 – Purmerend. Telef. inlichingen: 02990/27153.

Boekbespreking

L. J. Alders †, K. H. Cohen e.a., *Wiskunde voor H.A.V.O.*, 3 H, Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, 1970, 153 blz., *f* 9,75.

Deel 3 H is bestemd voor de 3e klas havo. Behandeld worden: Vierkantsvergelijkingen, vectoren, relaties, functies en afbeeldingen, vermenigvuldiging van figuren, lineaire en kwadratische functies, transformaties, ongelijkheden, goniometrie en statistiek (frequentie, mediaan, gemiddelde).

Enkele opmerkingen:

In § 1 wordt opgemerkt dat men vergelijkingen van hogere graad dan 1 oploste m.b.v. ontbinding in factoren. Waarom zijn de auteurs niet consequent?
Schrijft men b.v. $x^2-4x-2=0 \leftrightarrow (x-2)^2-6=0 \leftrightarrow (x-2-\sqrt{6})(x-2+6)\sqrt{}=0$, dan slaat men twee vliegen in een klap en § 9 wordt overbodig.
Bij de afleiding van de formule op blz. 4 vindt men dan

$$(2Ax+B)^2-(B^2-4AC)=0$$

en blijkt direct dat als $B^2-4AC<0$, de vergelijking geen wortels heeft en het linkerlid niet in factoren is te ontbinden.
Waarom heeft men in figuur 10, waaruit niets blijkt niet vervangen (zonder het te noemen) door een vierzijdig prisma? Het bewijs was dan t.z.t. ook juist in R_3.
Op blz. 54 wordt de lengte van een vector gedefinieerd. Het is toch niet nodig om op blz. 98 het bewijs viermaal te controleren?
Met blz. 70 ben ik ook niet gelukkig, de kans is groot dat men dit schema van buiten leert. Waarom niet: Een functie is definiet positief (negatief) als het absolute minimum (maximum) positief (negatief) is? Dit zal wel eens wat meer rekenwerk vragen, maar het inzicht in dit soort situaties is toch verbeterd.
Mogelijk zijn deze opmerkingen een overweging waard.

Burgers

C. A. Ch. Görts e.a., *Computerkunde* I over A.V.O. en V.W.O., Wolters-Noordhoff, Groningen 1971, 92 blz., *f* 6,25.

Deze cursus is ontstaan uit een experiment dat onder auspiciën van de commissie modernisering leerplan wiskunde heeft plaatsgevonden aan een tiental scholen. De cursus zal in twee delen worden uitgegeven.
Hoe een computer werkt wordt niet besproken, wel welke opdrachten men de computer kan geven met de nadruk op hoe dit dient te geschieden.
De opbouw is gelijkmatig opklimmend in moeilijkheid. Uitgaande van blokschema's komt men tot programmeren. De taal hiervoor nodig komt geleidelijk aan bod. De auteurs kozen een eigen taal: Ecol (*e*ducative *co*mputer *l*anguage).
De schrijvers waarschuwen dat de computer niet als een denkend wezen moet worden beschouwd, doch men vindt uitdrukkingen als: Hij kijkt nu eerst in de G.P.'s . . . hij telt . . ., hij bergt op . . ., hij leest de ponsband . . ., hij schrijft . . . Niet dat ik bezwaar heb tegen deze uitdrukkingen, ze maken het boekje juist prettig leesbaar.
Al met al lijkt me deze uitgave zeer geslaagd, ook voor de leerlingenbibliotheek.

Burgers

Drs. J. van Dormolen, *Goniometrische functies*, 119 blz., ingen. *f* 9,90; Van Goor Zonen, Den Haag, 1970.

In ons onderwijs kunnen we bij de traditionele ontwikkeling van het hoekbegrip een viertal fasen onderscheiden. In de eerste daarvan beschouwen we bijvoorbeeld de sinus van een concrete, getekende hoek, in de tweede de sinus van een klasse van hoeken, bijv. sin 30°. In de derde gaan we over tot invoering van de radiaal als nieuwe hoekmaat en spreken dan bijvoorbeeld van sin ($\frac{1}{6}\pi$ rad). In de vierde fase komen de goniometrische functies aan de orde en nu nemen we niet meer de sinus van een benoemd getal maar van een onbenoemd getal. Het differentiëren van sin x, waarin x niet een onbenoemd getal zou zijn maar een in graden of radialen gegeven grootheid leidt tot grote moeilijkheden. Het veelal gegeven advies nu voortaan de naam radialen maar weg te laten is voor een behoorlijk inzicht in het afbeeldingsproces in hoge mate onbevredigend.
De hier in het geding zijnde didactische moeilijkheden worden nu door Van Dormolen in het voetspoor van Gerretsen en anderen op doeltreffende wijze ontweken door het op de voorgrond stellen van de zogenaamde *opwindfunctie*. Hierbij wordt de getallenlijn op welomschreven wijze om de eenheidscirkel opgewonden als garen om een klos. Met elk punt van de cirkel corresponderen nu oneindig veel getallen die onderling veelvouden van 2π verschillen. Eerst na dit opwindproces worden de goniometrische functies gedefinieerd. En de desbetreffende definities kunnen nu gegeven worden voor en aleer er van radialen als hoekmaat sprake is geweest. Een beroep op graden of radialen wordt niet gedaan, wel een beroep op het begrip booglengte.
Met de verschijning van dit leerboekje voor goniometrische functies als afbeeldingen van de reële getallen in zichzelf is Van Dormolens algebra-analyse-serie tot een zekere afsluiting gekomen. Het boekje verdient om zijn oorspronkelijke opzet, zijn heldere betoogtrant en zijn goede selectie van opgaven de aandacht van alle wiskundedocenten bij het v.w.o.
We wijzen er nog op dat achterin een eenvoudige tabel van functiewaarden van de goniometrische functies is opgenomen, waarbij het argument decimaal is uitgedrukt voor waarden van 0 tot $\frac{1}{2}\pi$.

Joh. H. Wansink

S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Volume II; Interscience Publishers, New York/London, 1969; 470 blz., prijs: 164 s.

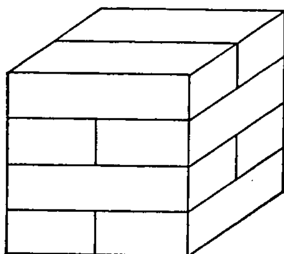
De auteurs bouwen in dit deel, dat de hoofdstukken VII–XII bevat, voort op wat zij in het (recensent onbekende) eerste deel hebben ontwikkeld. Op fundamentele wijze worden klassieke theorema's uit de differentiaalmeetkunde afgeleid (hoofdstuk VII), variatieproblemen op geodeten bestudeerd (hoofdstuk VIII), wordt aandacht geschonken aan invariante affiene betrekkingen en aan bijna-complexe structuren op homogene ruimten (hoofdstukken IX en X), waarna in het bijzonder de basisresultaten in de theorie van affiene, Riemann en Hermitese symmetrische ruimten worden gegeven (hoofdstuk XI). In het slothoofdstuk worden differentiaalmeetkundige aspecten van karakteristieke klassen bestudeerd.
Twee appendices (over integreerbare reële analytische, bijna-complexe structuren resp. over definities en eigenschappen in Lie-algebra's) en zeventien 'notes' vullen de behandelde stof aan. In een uitgebreide bibliografie (68 blz.) wordt voor de lezer de weg naar een groot aantal publikaties gewezen.
Het boek is van voortreffelijk gehalte, in de eerste plaats bestemd voor hen die op het gebied van de moderne differentiaalmeetkunde werken of die daartoe plannen hebben.

W. J. Claas

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek

254 Acht congruente stenen, waarvan er twee rood, twee groen, twee blauw en twee zwart zijn, worden gestapeld op de manier, die weergegeven is in onderstaande figuur. Op hoeveel verschillende manieren is dit mogelijk? Twee manieren worden als dezelfde beschouwd als ze door verplaatsing in elkaar kunnen overgaan.



255 Verbind in de onderstaande figuur de negen punten in de door de nummering aangegeven volgorde door een lijn, die gesloten is en zichzelf niet snijdt.
Kies nu een willekeurige andere volgorde van de punten en verbind ze weer door een dergelijke lijn. Deze lijn mag de voorgaande niet anders snijden dan in de negen gegeven punten. Is dit bij sommige andere volgorden mogelijk? Bij alle?
(Onder een andere volgorde wordt verstaan een volgorde, die uit de voorgaande niet kan ontstaan door cyclische permutatie of omkering van de volgorde.)

1· 8· 3·
6· 9· 5·
4· 2· 7·

Oplossingen

252 Het probleem ging over het sluiten van huwelijken tussen jongens uit V en meisjes uit W, waarbij iedere jongen trouwde met een meisje, dat hij aardig vond. Mathematisch geformuleerd was het probleem aldus:
R is een relatie van V naar W. Het domein van de relatie is V. Het beeld van een deelverzameling V_1 van V is een deelverzameling W_1 van W, die voor elke V_1 minstens eveneel elementen bevat als V_1. Bewijs, dat er een injectieve afbeelding is van V naar W.
Noem de jongens uit V: $j_1, j_2, \ldots, j_n$. Ga nu als volgt te werk: j_1 kiest een meisje dat hij aardig vindt, j_2 kiest uit de overgebleven meisjes er een dat hij aardig vindt, ... Deze kruik gaat te water tot hij breekt. Laten we zeggen, dat j_{13} geen meisje van zijn gading meer kan vinden. Noem de meisjes, die door $j_1, \ldots, j_{12}$ gekozen zijn, resp. $m_1, \ldots, m_{12}$. De meisjes, die j_{13} aardig vindt, zijn: m_2, m_2. Nu gaan we kijken of j_2 of j_7 misschien een van de nog niet gekozen meisjes aardig vindt. Als j_2 een nog niet gekozen meisje m aardig vindt, dan koppelen we j_2 met m en j_{13} met m_2.
Het kan echter zijn, dat we er zo niet komen. Laten de enige meisjes, die

j_2 aardig vindt, zijn: m_2, m_6 en m_8,
j_7 aardig vindt, zijn: m_7, m_8 en m_{10}.

We gaan nu een stap verder en beschouwen de verzameling jongens $\{j_2, j_6, j_7, j_8, j_{10}\}$. Onder-

stel een van deze jongens, b.v. j_6, vindt een meisje aardig, dat nog niet gekozen is. We koppelen j_6 dan met dit meisje. Daarna koppelen we j_2 met m_6 en ten slotte j_{13} met m_2.
Lukt het nog niet op deze manier, dan gaan we een stap verder. Zo lukt het in elk geval j_{13} een vrouw te verschaffen en kunnen we op analoge manier onze aandacht op j_{14} vestigen, enz. Tenzij het bovengenoemde proces ook na iteratie niet tot een positief resultaat leidt. In dat geval komen we uiteindelijk tot de conclusie, dat er een verzameling jongens is, b.v. $\{j_1, j_2, j_6, j_7, j_8, j_{10}, j_{13}\}$, die als R-beeld heeft $\{m_1, m_2, m_6, m_7, m_8, m_{10}\}$. Dit is in strijd met de onderstelling, dat het aantal elementen van V_1 niet kleiner is dan het aantal elementen van het R-beeld W_1 van V_1. Hiermee is het bewijs voltooid.

253 Een partij goederen (b.v. een koek) moet door een notaris verdeeld worden onder drie, vier, vijf, . . . erfgenamen. Welke strategie volgt de notaris (naar analogie van de strategie: de een deelt, de ander kiest)?
Hieronder volgt de strategie voor vijf erfgenamen. De personen worden A, B, C, D en E genoemd. De notaris vraagt A de koek te verdelen in verhouding 2 : 3. Daarna vraagt hij B een van beide stukken te kiezen. Kiest B het kleine, dan zal dat verdeeld worden onder B en C, kiest hij het grote, dan wordt dit verdeeld onder B, C en D.
Neem aan, dat B het grote stuk kiest. De notaris vraagt B dit te verdelen in verhouding 1 : 2. C mag nu het kleine stuk kiezen en houden. Hij mag ook het grote stuk kiezen; dit wordt dan verdeeld onder C en D. Neem aan, dat C het grote stuk kiest; B krijgt dan het kleine. C krijgt de opdracht het grote stuk in twee gelijke delen te verdelen. D kiest één vande beide en C krijgt het andere.
Nu is nog het kleine stuk van de eerste verdeling over. E krijgt de opdracht dit in twee gelijke delen te verdelen. A kiest een van de delen en E krijgt het andere.
De algemene oplossing is analoog.

Didactische Literatuur

uit Buitenlandse Tijdschriften

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 271–273, november 1969–april 1970.

G. Walusinski, Joies et périls de la haute mer;
A. Defix, Métrologie légale;
J.-M. Chevalier, Variations prudentes sur quelques problèmes d'écriture;
J.-M. Chevalier, Matériaux pour un dictionnaire;
E. Ehrhart, Deux ensembles structurés amusants et instructifs;
G. Walusinski, Quatres jours à Exeter;
G. Walusinski, Sur le congrès de Lyon;
R. Gauthier, Quadrillages.

M. A. Touyarot e.a., Assemblée générale, Clermont-Ferrand.

Y. Gentilhomme, Enseignement mathématique et linguistique;
J.-M. Chevallier, Strict-tease;
L. Duvert, Parenthèses et associativité;
M. Glaymann, Initiation aux espaces vectoriels;
P. Perran, Sur la dynamique des groupes;
G. Walusinski, Sur les tables numériques Laborde;
G. Walusinski, Projets de programmes de Terminales B, C, D, E établis par la commission Lichnerowicz.





Inhoud